*Devoir de **synthèse** n°1*

Le sujet comporte 4 pages. La page 4/4 est à rendre avec la copie

Exercice n°1 — 3,25 points

Calculer les limites suivantes :

1) $\lim_{x\to-3}\left(\frac{x^2-9}{x+3}\right)$ **2)** $\lim_{x\to1}\left(\frac{x^3-x}{3x^2-2x-1}\right)$ **3)** $\lim_{x\to0}\left(\frac{\sqrt{2+x}-\sqrt{2-x}}{x}\right)$

4) $\lim_{x\to+\infty}\left(\sqrt{x^2+x+1}-2x\right)$ **5)** $\lim_{x\to+\infty}\left(\frac{\sqrt{4x^2+1}}{2x-3}\right)$

Exercice n°2 — 5,5 points

Soit f la fonction définie sur $IR\setminus\{-1\}$ par $f(x)=\frac{2(x+1)}{x^3+x^2+x+1}$

1) **a)** On pose $g(x)=\frac{2}{1+x^2}$. Montrer que pour tout réels $x\neq-1$: $f(x)=g(x)$

b) Calculer : $\lim_{x\to-1} f(x)$. En déduire que la fonction f est prolongeable par continuité en -1 et déterminer sa prolongement

2) Etudier la parité de la fonction g

3) **a)** Montrer que g est strictement décroissante sur $[0,+\infty[$

b) En déduire que g est strictement croissante sur $]-\infty,0]$

4) Calculer $g(0)$ puis déduire que g est bornée sur IR

5) On pose $h(x)=g(x)-2x$

a) Montrer que h est strictement décroissante sur $[0,+\infty[$

b) Montrer que l'équation $h(x)=0$ admet une unique solution $\alpha\in\left]\frac{1}{2},1\right[$

c) Montrer que $\alpha^3+\alpha=1$

6) Dans la feuille annexe on a tracé C_f : la courbe représentative de la fonction f sur $[0,+\infty[$. Compléter brièvement la construction de C_f sur $IR\setminus\{-1\}$et préciser la valeur exacte de α sur la figure

Exercice n°3 — *5 points*

I. Soit f la fonction définie par le tableau de variation suivant :

x	$-\infty$		-4		1		$+\infty$
f	0	$\searrow$	-2	$\nearrow$	0	$\nearrow$	$+\infty$

1) Déterminer D_f : le domaine de définition de la fonction f

2) Déterminer le signe de $f(x)$ sur D_f

3) Résoudre l'équation $f(x) < 0$

II. soit g la fonction définie par $g(x) = \frac{x}{\sqrt{x^2+1}-1}$

1) Déterminer D_g : le domaine de définition de la fonction g

2) Montrer que g est une fonction impaire

3) Vérifier que, pour tout réels $x \in IR^*, g(x) = \frac{\sqrt{x^2+1}+1}{x}$

4) **a)** Montrer que, pour tous réels a et b appartenant à$]0, +\infty[$,

$$g(a) - g(b) = \frac{b^2 - a^2}{ab\left(b\sqrt{a^2+1} + a\sqrt{b^2+1}\right)} +$$

b) En déduire les variations de g sur $]0, +\infty[$

5) on se propose dans cette question de démontrer que g n'admet ni un maximum ni un minimum sur $]0, +\infty[$

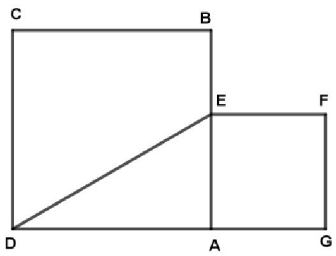
a) Supposons que M est le maximum de g sur $]0, +\infty[$ atteint en un réel a et m son minimum sur $]0, +\infty[$ atteint en un réel b.

Comparer $g(a) et$ $g(\frac{a}{2})$ d'une part et $g(b) et$ $g(2b)$ d'autre part

b) En déduire que g n'admet ni un maximum ni un minimum sur $]0, +\infty[$

Exercice n°4 — *6.25 points*

Dans la figure ci-contre $ABCD$ et $AEFG$ sont deux carrés tel que $AB = \sqrt{3}$ et E le point du segment $[AB]$ qui vérifie $\widehat{ADE} = \frac{\pi}{6}$



1) **a)** Montrer que $\overrightarrow{DA}.\overrightarrow{DE} = 3$

b) En déduire que $DE = 2$ $puis$ $AE = 1$

2) **a)** Calculer $\overrightarrow{AB}.\overrightarrow{AE}$ et $\overrightarrow{AD}.\overrightarrow{AG}$

b) En déduire que les droites (DE) et (BG) sont perpendiculaires

3) **a)** Montrer que $\overrightarrow{DE}.\overrightarrow{DB} = 3 + \sqrt{3}$

b) En déduire que $\cos(\frac{\pi}{12}) = \frac{\sqrt{6}+\sqrt{2}}{4}$

4) Soit $I = A * C$

a) Montrer que pour tout point M du plan on a : $MA^2 + MC^2 = 2MI^2 + 3$

b) Déterminer l'ensemble des points M du plan tel que $MA^2 + MC^2 = 7$

5) La droite (DE) coupe (BG) en H. Soit $J = B * G$

a) En exprimant $\overrightarrow{GD}.\overrightarrow{GB}$ de deux manières différentes, montrer que $GH = \frac{1+\sqrt{3}}{2}$

b) En déduire que $JH = \frac{\sqrt{3}-1}{2}$

Feuille annexe

Nom : ……………………………….... Prénom :…………………………… ………